



5. Баум Ф.А., Станюкович К.П., Шехтер Б.И. Физика взрыва.- М.: Физматгиз, 1959, 800 с.
6. Савченко Ю.В. Моделирование параметров при инициировании плоских и цилиндрических высокоимпульсных источников энергии / Ю.В. Савченко // Гірничі електромеханіка та автоматика : наук.-техн. зб. – Д. : НГУ, 2016. – Вип. 97. – С. 116 – 120.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976 .
8. Irwin GE Fracture // Handbch der Physik - Berlins 1985- s 551-590.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975, 544 с.
10. Сьярле Ф. Метод конечных элементов в эллиптических задачах. -М.:Мир, 1980, 512 с.

УДК 539.3/.6

СПРОЩЕНА МЕТОДИКА СИЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ РАМ ПРИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАННЯХ

Ю.С. Холодняк¹, С.В. Подлесний², С.В. Капорович³

¹кандидат технічних наук, доцент, зав. кафедрою технічної механіки, e-mail: texmex@dgma.donetsk.ua, holodhjak.yuri@gmail.com

²кандидат технічних наук, декан факультету автоматизації машинобудування та інформаційних технологій, доцент кафедри технічної механіки, e-mail: sergeypodlesny@gmail.com

³кандидат технічних наук, ст. викладач кафедри технічної механіки, e-mail: kaporovich@gmail.com

^{1, 2, 3} Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ, Україна

Анотація. Математична модель, що запропонована в роботі, описує коливання невагомої рами з точковою масою при одночасній дії на них вертикальної й горизонтальної гармонійних збуджуючих сил. У основу моделі покладений метод сил, що встановлює зв'язок переміщень рами з силами, які на неї діють. Разом з моделлю отримані залежності для обчислення резонансних частот коливальної системи. Виконані розробки дозволяють визначати динамічні характеристики коливального процесу і розраховувати рами на міцність і жорсткість. Методика такого розрахунку реалізована у середовищі Mathcad15. Результати роботи можуть бути корисними студентам і викладачам технічних ВНЗ, також фахівцям - практикам, що виконують силові розрахунки.

Ключевые слова: плоскі рами, вимушені коливання, математична модель, резонансні частоти, силові розрахунки.

SIMPLIFIED METHOD OF POWER CALCULATION OF PLANE FRAMES UNDER CONDITIONS OF FORCED OSCILLATIONS

Yuri S. Kholodnyak¹, Sergey V. Podlesny ², Svitlana V. Kaporovich³

¹Ph.D., Associate Professor of Technical Mechanics Department, Head of Technical Mechanics Department, e-mail: texmex@dgma.donetsk.ua, holodhjak.yuri@gmail.com





²Ph.D., Associate Professor of Technical Mechanics Department, Dean of Computer and Information Technology Department, e-mail: sergeypodlesny@gmail.com

³Ph.D., Senior Lecturer of Technical Mechanics Department, e-mail: kaporovych@gmail.com

^{1, 2, 3} Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

Abstract. The mathematical model proposed in this paper describes oscillations of a weightless frame with a point mass and simultaneous action of vertical and horizontal harmonic disturbing forces. The model is based on the method of forces, which establishes the relationship between the movement of the frame and the forces acting on it. Together with the model, dependences were obtained for calculating resonant frequencies of the oscillating system. The completed developments allow to determine dynamic characteristics of the oscillation process and to calculate frames for strength and rigidity. The methodology for this calculation is implemented in the Mathcad 15 environment. The results of the work may be useful to students and teachers of technical universities, as well as practitioners who perform power calculations.

Keywords: plane frame, forced oscillation, mathematical model, resonant frequency, power calculation.

Введення. Поперечні коливання стрижневих конструкцій – балок і плоских рам, що відбуваються під дією навантажень, які періодично змінюються в часі, становлять неабиякий теоретичний і практичний інтерес.

В навчально-методичній літературі з опору матеріалів висвітлюються, як правило, вимушені коливання невагомої балки із закріпленою на ній точковою масою [1-3]. Така модель коливної системи, незважаючи на свою простоту, дає зазвичай прийнятну для практики точність силових розрахунків.

Поряд з цим в університетських курсах опору матеріалів і будівельної механіки аналізуються також випадки вимушених коливань балок з розподіленими або кількома дискретними масами [4-6]. Однак пропоновані при цьому методики розрахунку для широкого практичного застосування досить складні, оскільки вимагають поглибленої математичної підготовки, що виходить за рамки навчальних планів звичайних інженерних ВНЗ.

Подібні (уточнені) методики розрахунку, що стосуються вимушених коливань плоских рам, зазвичай розглядаються в університетських курсах будівельної механіки [7-9]. Вони також досить складні і малозастосовні для широкого застосування в машинобудуванні та інших галузях промисловості. Для цього потрібні більш прості методики розрахунку, що не потребують спеціальної математичної підготовки, але забезпечують при цьому прийнятну для практики точність.

Мета роботи. Метою даної роботи є розробка спрощеної двовірної математичної моделі вимушених коливань плоских рам з наступним використанням цієї моделі в їх силових розрахунках.

Матеріал і результати досліджень.

Для реалізації зазначеної мети візьмемо найпростішу Г-подібну раму (рис. 1) і проаналізуємо її деформацію.

Нехай в довільний момент часу на коливну масу m діють сили P_1 і P_2 , які викликають переміщення Δ_1 і Δ_2 (див. рис. 1):

$$\Delta_1 = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \quad (1)$$

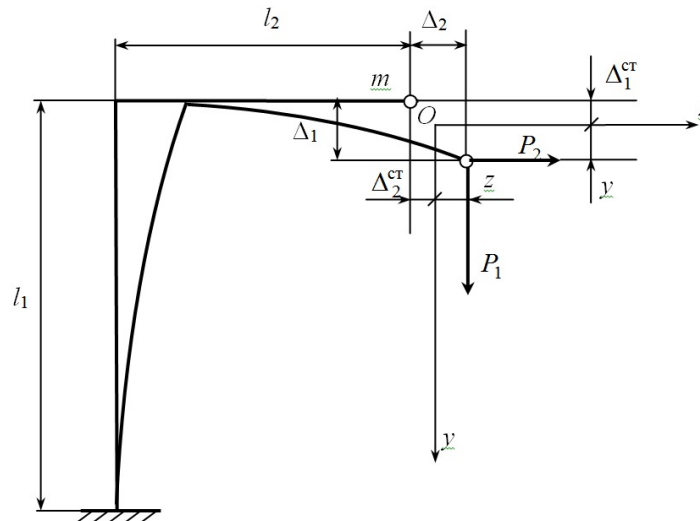


Рисунок 1 – Схема рами

$$\Delta_2 = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}, \quad (2)$$

де δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} , δ_{21} – переміщення коливної маси під дією одиничних сил $P_1 = 1$ і $P_2 = 1$, які визначаються з допомогою епюр згинальних моментів від цих сил – \bar{M}_1 і \bar{M}_2 [4].

Коливання маси відбуваються відносно положення статичної рівноваги (точка O на рис.1). В цьому положенні:

$$P_1^{ct} = mg, \quad (3)$$

$$P_2^{ct} = 0. \quad (4)$$

Тоді згідно з (1) і (2) маємо:

$$\Delta_1^{ct} = P_1^{ct} \cdot \delta_{11} = mg \cdot \delta_{11}, \quad (5)$$

$$\Delta_2^{ct} = P_1^{ct} \cdot \delta_{21} = mg \cdot \delta_{21}. \quad (6)$$

В процесі коливань (див. рис. 1):

$$\Delta_1 = \Delta_1^{ct} + y = mg \cdot \delta_{11} + y, \quad (7)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^{ct} + z = mg \cdot \delta_{21} + z. \quad (8)$$

Підставимо вирази (7) і (8) у формули (1) і (2), отримаємо:

$$\begin{cases} mg \cdot \delta_{11} + y = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \\ mg \cdot \delta_{21} + z = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}. \end{cases} \quad (9)$$

Вирішуючи систему рівнянь (9), отримаємо залежності P_1 і P_2 від поточних координат коливної маси:

$$P_1 = f_1(y, z) = mg + \frac{z}{\delta_{21}} - \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}}, \quad (10)$$

$$P_2 = f_2(y, z) = \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}}. \quad (11)$$

Врахуємо, що P_1 і P_2 – сили, що деформують раму. Тоді відповідні реакції рами будуть дорівнювати цим силам:

$$R_1 = P_1 = f_1(y, z), \quad (12)$$

$$R_2 = P_2 = f_2(y, z). \quad (13)$$

Конкретизуємо задачу. В якості коливної маси приймемо, як це роблять автори ряду робіт [1, 10, 11], електродвигун зі статично неотбалансованим ротором. Його кутова швидкість ω , модуль збурюючої сили, яку він створює – H .

Докладемо до зазначеної маси силу тяжіння – $m\bar{g}$, реакції рами – \bar{R}_1 і \bar{R}_2 , збурюючу силу \bar{H} , сили інерції $\bar{\Phi}_1$ і $\bar{\Phi}_2$ і сили опору середовища – \bar{F}_1 і \bar{F}_2 (рис. 2).

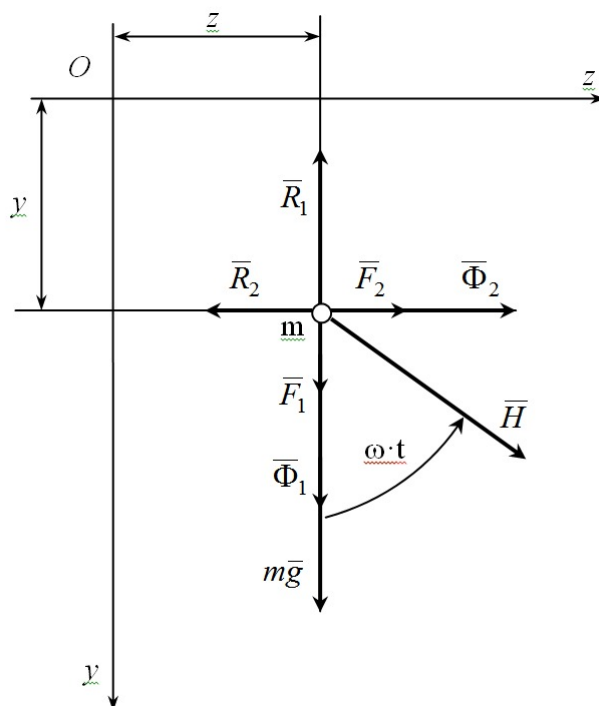


Рисунок 2 – Схема навантаження коливної маси

Під дією цих сил маса m буде перебувати в положенні кінетостатичної рівноваги:

$$m\bar{g} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{H} + \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0. \quad (14)$$

Спроектуємо векторне рівняння (14) на осі y і z , отримаємо:

$$\begin{aligned} (y): mg + R_1^y + H \cdot \cos \omega t + \Phi_1^y + F_1^y = \\ = mg - f_1(y, z) + H \cdot \cos \omega t - m \cdot \ddot{y} - \mu \cdot \dot{y} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$(z): R_2^z + H \cdot \sin \omega t + \Phi_2^y + F_2^y = -f_2(y, z) + H \cdot \sin \omega t - m \cdot \ddot{z} - \mu \cdot \dot{z} = 0. \quad (16)$$

Після перетворень (15) і (16) маємо остаточну форму диференціальних рівнянь руху маси m :

$$m \cdot \ddot{y} + \mu \cdot \dot{y} + f_1(y, z) = mg + H \cdot \cos \omega t, \quad (17)$$

$$m \cdot \ddot{z} + \mu \cdot \dot{z} + f_2(y, z) = H \cdot \sin \omega t, \quad (18)$$

де \ddot{y}, \ddot{z} – проекції на осі координат прискорення коливної маси;

\dot{y}, \dot{z} – проекції на осі координат швидкості цієї маси;

μ – коефіцієнт опору середовища;

t – час від початку руху (виходу маси m з положення статичної рівноваги).

Слід зазначити, що рівняння (17) і (18) є універсальними, що не залежать безпосередньо від геометричних параметрів рами: ці параметри пов'язані лише з величинами $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12} = \delta_{21}$. Для рами, зображеної на рисунку 1, їх значення легко обчислити з допомогою правила Верещагіна шляхом перемноження епюр \bar{M}_1 і \bar{M}_2 (рис. 3, 4):

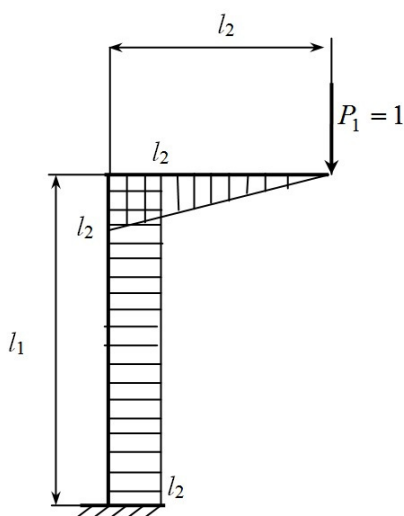


Рисунок 3 – Епюра \bar{M}_1

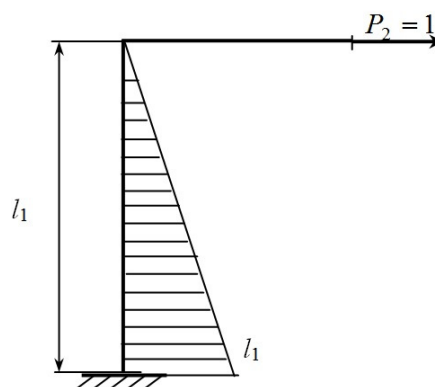


Рисунок 4 – Епюра \bar{M}_2

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 \cdot l_2 \right) = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^3 + l_1 \cdot l_2^2 \right) \quad (19)$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 = \frac{l_1^3}{3E \cdot J_x}, \quad (20)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_1 = \frac{\ell_1^2 \cdot \ell_2}{2E \cdot J_x}, \quad (21)$$

де EJ_x – жорсткість перерізу стержнів рами.

При іншій формі рами формули для обчислення зазначених величин будуть іншими, однак процедура їх визначення залишиться колишньою.

Знайдені значення переміщень δ_{11} , δ_{22} і δ_{12} дозволяють визначити також резонансні частоти коливань системи.

В основу цього визначення покладемо формулу для визначення резонансних частот коливань рами з двома закріпленими на ній точковими масами m_1 і m_2 , кожна з яких може переміщатися в одному напрямку [12]. Ця формула має вигляд:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} \cdot (22)$$

В нашому випадку на рамі закріплена одна маса m , але вона переміщується у двох напрямках – вертикальному і горизонтальному. Щоб врахувати цю обставину, покладемо у формулі (22) $m_1 = m_2 = m$.

Тоді, після нескладних перетворень формула (22) прийме вигляд:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22}) \pm \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4 \cdot \delta_{12}^2}}}} \quad (23)$$

Для оцінки адекватності запропонованої моделі проводилося порівняння одержуваних з її допомогою результатів з даними, опублікованими в роботі [13], де на основі використання класичної моделі вимушених коливань системи з одним ступенем свободи визначені параметри вертикальних коливань невагомою консольної балки (двотавр 20, $\ell = 3$ м) з встановленим на ній електродвигуном ($m = 1000$ кг, $n = 1000$ об/хв) зі статично неотбалансованим ротором, що створює збурюючу силу $H = 0,3mg$. У цій роботі кругова частота власних коливань системи дорівнює $\kappa = 20,220$ с⁻¹, а максимальні нормальні напруження в балці $\sigma_{\max} = 171$ МПа. В розрахунку прийнято $\mu = 0$.

Альтернативний розрахунок за запропонованою методикою виконувався в середовищі Mathcad 15 [14, 15] стосовно до схеми рами, зображеної на рис. 1, з максимальним її наближенням за формою і розмірами до вищезгаданої балки: $\ell_1 = 0,1$ м, $\ell_2 = 3$ м. Інші параметри системи – такі ж, як і в роботі [13]. Результати розрахунку представлені на рис. 5, 6.

Розбіжність результатів за σ_{\max} становить 2,096%, по резонансній частоті 4,649%. Як видно, результати обох розрахунків досить близькі.

$$g := 9.81 \quad J_x := 1840 \cdot 10^{(-8)} \quad eE := 2 \cdot 10^{11} \quad l_2 := 3 \quad m := 1000 \quad H := 2943 \quad \omega := 104.7$$

$$l_1 := 0.1 \quad W_x := 184 \quad \mu := 0.0000001$$

$$\delta_{11} := \frac{2 \cdot l_2^3 + 6 \cdot l_1 \cdot l_2^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{22} := \frac{2 \cdot l_1^3}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{12} := \frac{3 \cdot l_2 \cdot l_1^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{11} = 2.69 \times 10^{-6} \quad \delta_{22} = 9.058 \times 10^{-11} \quad \delta_{12} = 4.076 \times 10^{-9} \quad \delta_{21} = 4.076 \times 10^{-9}$$

Given

$$m \cdot y''(t) + \mu \cdot y'(t) + \left[\frac{-(-z(t) \cdot \delta_{12} - m \cdot g \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{21} + y(t) \cdot \delta_{22} + m \cdot g \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{22})}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22})} \right] = H \cdot \cos(\omega \cdot t) + m \cdot g$$

$$m \cdot z''(t) + \mu \cdot z'(t) - \frac{-z(t) \cdot \delta_{11} + y(t) \cdot \delta_{21}}{-\delta_{12} \cdot \delta_{21} + \delta_{11} \cdot \delta_{22}} = H \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad z'(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002 \dots 4$$

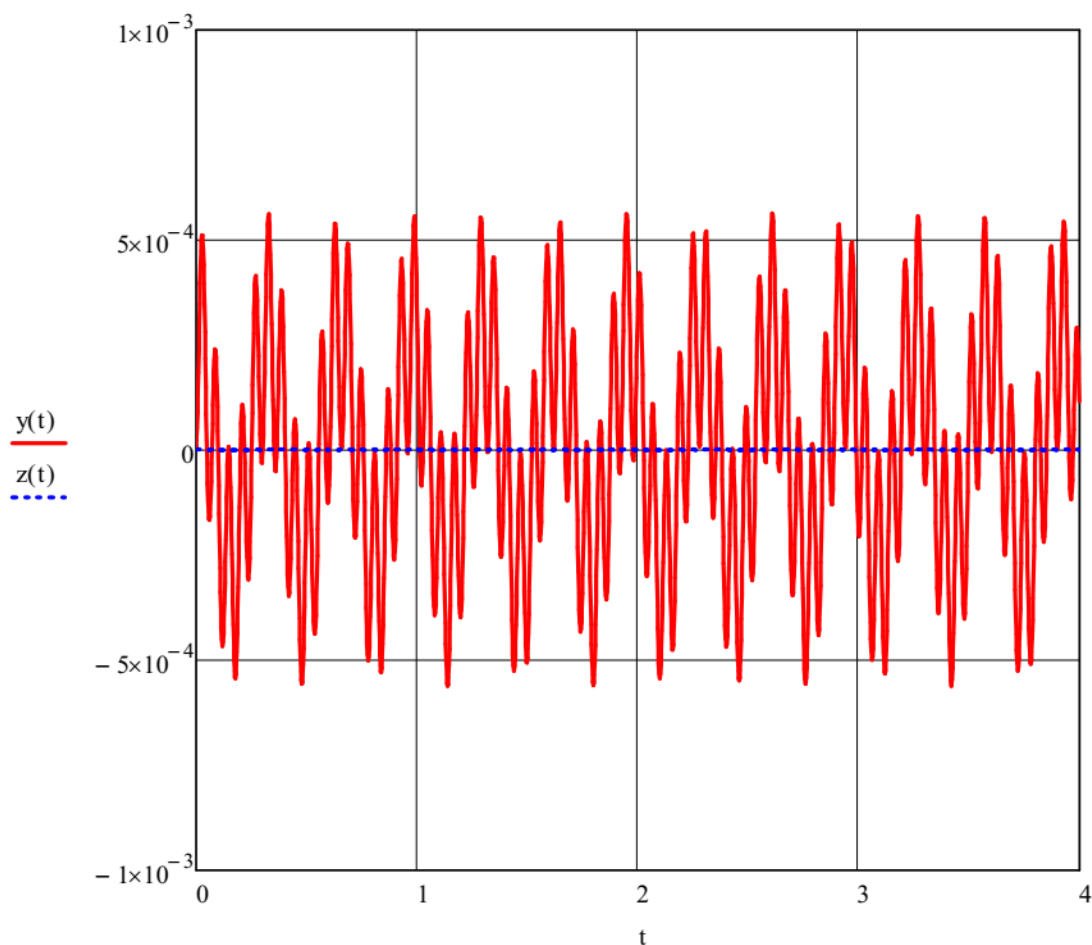
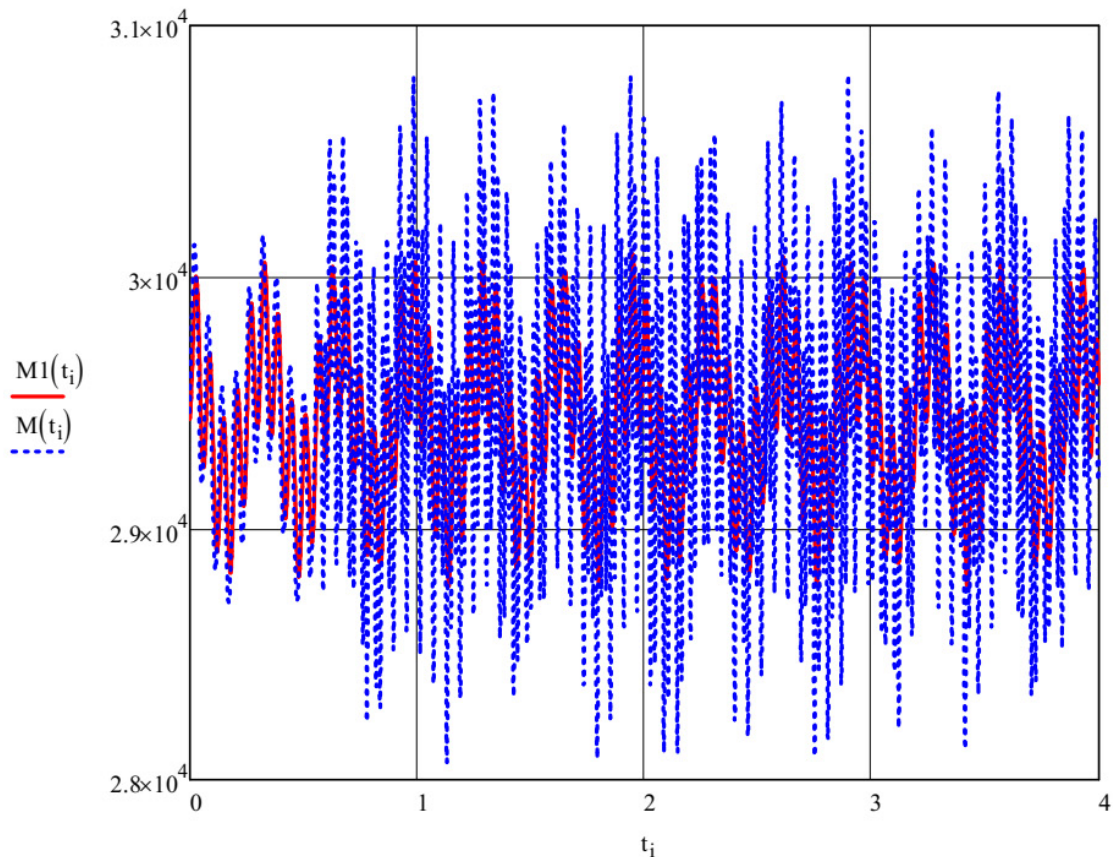


Рисунок 5 – Розрахунок за пропонованою методикою.

$$M1(t) := \left(m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta_{21}} - \frac{y(t) \cdot \delta_{21} - z(t) \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}} \right) \cdot l_2 \quad M2(t) := \left(\frac{y(t) \cdot \delta_{21} - z(t) \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \right) \cdot l_1$$

$$M(t) := M1(t) + M2(t)$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..4000 \quad t_i := 0 + \frac{i}{1000} \quad MM_i := M(t_i) \quad MM1_i := M1(t_i)$$



$$M_{\max} := \max(MM) \quad M_{\max} = 3.08 \times 10^4 \quad \sigma_{\max} := \frac{M_{\max}}{W_x} \quad \sigma_{\max} = 167.416$$

$$M1_{\max} := \max(MM1) \quad M1_{\max} = 3.009 \times 10^4 \quad \sigma1_{\max} := \frac{M1_{\max}}{W_x} \quad \sigma1_{\max} = 163.53$$

$$\omega R1 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) + m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} \quad \omega R1 = 19.28$$

$$\omega R2 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) - m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} \quad \omega R2 = 3.442 \times 10^3$$

Рисунок 6 – Лист 2

Для подальшої апробації запропонованої методики проведена серія

аналогічних розрахунків для такої ж Г-подібної рами ($\ell_1 = 3 \text{ м}$, $\ell_2 = 2 \text{ м}$) і варіюванням значень ω в діапазоні від 3 с^{-1} до 300 с^{-1} . За результатами цих розрахунків побудовані графіки залежностей M_{\max} і σ_{\max} від ω , експериментально підтверджують наявність у кожного з них двох резонансних піків. Для уточнення координат їх найвищих точок додатково побудовані детальні графіки зазначених залежностей поблизу резонансних частот ω_1 і ω_2 . Трасуванням цих графіків визначені експериментальні значення резонансних частот. Порівняння експериментальних і розрахункових значень резонансних частот показує їх практично повну ідентичність: $\Delta(\omega_1) = 0,296\%$, $\Delta(\omega_2) = 0,018\%$.

Такий результат свідчить про прийнятність запропонованої методики розрахунку для практичних цілей, насамперед навчальних, оскільки вона не тільки досить точно визначає значення ω_1 і ω_2 , але і дає надійні силові результати, що підтверджують цю точність.

На закінчення відзначимо, що можливості розробленої методики не обмежуються зазначеними типами розрахункових завдань. Для її розвитку необхідні подальші дослідження, націлені на поглиблення теоретичних уявлень про процес і пошук більш досконалих розрахункових методів і засобів.

Висновок. Запропонована нова спрощена методика силового розрахунку плоских рам в умовах вимушених коливань, що дозволяє обчислювати величини максимальних нормальних напружень, що виникають в рамах, і визначати їх резонансні частоти.

Методика реалізована в середовищі Mathcad 15 і пройшла масштабну апробацію при вирішенні навчальних завдань як перевірконого, так і проектного розрахунків.

Виконана розробка може бути корисна студентам і викладачам технічних ВНЗ, а також фахівцям-практикам, які виконують силові розрахунки.

Подальші дослідження в напрямку розвитку виконаної розробки будуть сприяти поглибленню існуючих теоретичних уявлень і створення більш досконалих методів силових розрахунків і розрахункових засобів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: Навчальний посібник / В. В. Ковтун. – Львів: Афіша, 2002. – 280 с.
2. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов: Учеб. для сред. спец. учеб. заведений / Г. М. Ицкович. – М.: Высш. шк., 2001. – 368 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов: Учеб. для техн. ВУЗов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: Підр. для техн. ВНЗ / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка,



Е. С. Уманський. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.

5. Шевченко Ф. Л. Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач: Навч. посібник / Ф. Л. Шевченко. – Донецьк: ДонНТУ, 2013. – 260 с.

6. Ламси Б. Б. Сборник задач и упражнений по динамике стержневых систем: Учеб. пособие / Б. Б. Ламси и др. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2016. – 96 с.

7. Довнар Е. П. Расчет рам на статические и динамические нагрузки: Учеб. пособие / Е. П. Довнар, Л. Б. Климова. – Минск: БНТУ, 2004. – 186 с.

8. Поляков А. А. Строительная механика: Учеб. пособие / А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов. – Екатеринбург: УрФУ, 2014. – 424 с.

9. Гайджуров П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания: Учеб. пособие / П. П. Гайджуров. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2009. – 195 с.

10. Кочетов В. Т. Сопротивление материалов: Учеб. пособие / В. Т. Кочетов. – Ростов-на-Дону, Феникс, 2001. – 368 с.

11. Кутовий Л. В. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу "Опір матеріалів" (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л. В. Кутовий та ін. – Краматорськ ДДМА, 2007. – 220 с.

12. Старцева Л. В. Строительная механика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Л. В. Стацева, В. Г. Архипов, А. А. Семенов. – М.: Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.

13. Холодняк Ю. С. Особенности прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев. – Краматорськ: Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. №1(34), 2015. – С.96-102.

14. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс / Е. Г. Макаров. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.

15. Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad / Е. Г. Макаров. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 512 с.

16. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко и др. – К.: Наук. думка, 1988. – 704 с.